8-10-14.

Μετάδοση σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς.

Διαίρεση: Θέλουμε να εκτελέσουμε την πράξη $\frac{x}{y}$, $x,y \in \mathbb{R}$ στο εύρος των αρ. μηχανής. Αντί αυτής εκτελούμε:

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = fl\left(\frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)}\right) = \frac{x}{y} \cdot \frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)} \cdot (1+\varepsilon_3)$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = (1+d)$, $d = \frac{-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$, $|d| = \frac{|\varepsilon_2|}{|1+\varepsilon_2|} \leq \frac{u}{1-u}$

$z = \frac{x}{y} \cdot (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+d) = \frac{x}{y} \cdot (1+\varepsilon)^2 \cdot (1+d) = \frac{x}{y} \cdot (1+2\varepsilon+d+2\varepsilon d$ $+\varepsilon^2+\varepsilon^2 d)$. Τότε $\left|\frac{z-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = |2\varepsilon+d+2\varepsilon d+\varepsilon^2+\varepsilon^2 d| \leq$

$2|\varepsilon|+|d|+2|\varepsilon|\cdot|d|+|\varepsilon^2|+|\varepsilon^2|\cdot|d| \leq 3u+a$, a της τάξης του u^2.

$$|d| \leq \frac{u}{1-u} = u\cdot(1+u+u^2+\dots) = u+u^2+u^3+\dots = u+u^2(1+u+u^2\dots)$$

Το σφάλμα στρογγύλευσης κατά την διαίρεση είναι της τάξης $3u$

Πρόσθεση-Αφαίρεση.

Για την πρόσθεση της x και y εκτελείται: $\boxed{\text{(σημείωση: } |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq u)}$

$fl(fl(x)+fl(y)) = fl(x(1+\varepsilon_1)+y(1+\varepsilon_2)) = x(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)+y(1+\varepsilon_2)\cdot$ $(1+\varepsilon_3) = x(1+\varepsilon)^2+y(1+d)^2 = x+2x\varepsilon+x\varepsilon^2+y+2yd+yd^2 \approx$ $x+y+2(x\varepsilon+yd)$

$$\left|\frac{z-(x+y)}{(x+y)}\right| \approx \left|\frac{2(x\cdot\varepsilon+yd)}{x+y}\right| \leq \frac{2|x|\cdot|\varepsilon|+2|y|\cdot|d|}{|x+y|} \leq \frac{2u(|x|+|y|)}{|x+y|}$$

- Αν x,y είναι ομόσημοι τότε $|x|+|y| = |x+y|$, επομένως το σφάλμα είναι $2u$.
- Αν x,y είναι ετερόσημοι $\frac{|x|+|y|}{|x+y|} > 1$ κ' αν $x \approx -y$ τότε το σφάλμα γίνεται μεγάλο.

Πρόσθεση πολλών αριθμών.

Να βρεθεί η ποσότητα $1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i} = 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

Παρατηρώ ότι $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$

$S_n = 1 + (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1}$.

$S_9 = 2 - \frac{1}{10}$, $S_{99} = 1.99$, $S_{9999} = 1.9999$, $S_{999} = 1.999$.

→ Υπολογίζουμε το άθροισμα

$S_0 = 1$, $S_i = S_{i-1} + \frac{1}{i(i+1)}$, $i = 1, 2, \dots n$

Εκτελέστηκε το πρόγραμμα με υπολογιστή $M = M(10, 10, -10, 10)$

$S_9 = 1.900000000$, $S_{99} = 1.990000003$.

$\tilde{S}_{999} = 1.999000003$, $\tilde{S}_{9999} = 1.999899972$.

$T_0 = \frac{1}{n(n+1)}$ | εκτελώ με τον ίδιο υπολογιστή και βρίσκω τα ακριβή αποτελέσματα

$T_i = T_{i-1} + \frac{1}{(n-i)(n-i+1)}$

$T_n = T_{n-1} + 1$

Έστω ότι θέλω να προσθέσω τους a_i με $i = 1, 2, \dots N$.

$S_1 = a_1$, $S_i = S_{i-1} + a_i$, $i = 2, 3, n$. Υποθέτω ότι τα a_i είναι αριθμοί μηχανή

$\tilde{S}_1 = a_1$

$\tilde{S}_2 = fl(\tilde{S}_1 + a_2) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)$

$\tilde{S}_3 = fl(\tilde{S}_2 + a_3) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) + a_3(1+\varepsilon_2)$

$\tilde{S}_4 = fl(\tilde{S}_3 + a_4) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + a_3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + a_4(1+\varepsilon_3) = (a_1 + a_2)(1+d_1)^3 + a_3(1+d_2)^2 + a_4(1+d_3)$.

$\approx S_4 + 3d_1(a_1+a_2) + 2d_2 a_3 + d_3 a_4 \dots$

Το σφάλμα είναι περίπου ίσο με $3d_1(a_1+a_2) + 2d_2 a_3 + d_3 a_4$.

$\tilde{S}_N - S_N = (N-1)d_1(a_1+a_2) + (N-2)d_2 a_3 + \dots + d_N a_N$.

Αν a_i είναι απόλυτα φθίνουσα ακολουθία, τότε οι μεγαλύτεροι από τα όροι πολλ/ζονται με μεγάλους αριθμούς.